Angenommen wir glauben ⊛:
Für ein C^1-Vektorfeld $v: U \to \mathbb{R}^n$ auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen gilt dann

(Erinnerung $\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$)

$$\int_U \operatorname{div} v(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_U \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial U} v_i(x)\, n_i(x)\, dS(x)$$

$$= \int_{\partial U} v(x) \cdot n(x)\, dS(x)$$

Divergenzsatz / Gaußscher Integralsatz

$$\boxed{\int_U \operatorname{div} v\,dx = \int_{\partial U} v \cdot n\,dS}$$

Interpretation

Sei $v(x)$ die Geschwindigkeit, mit der sich Masse zu einem festen Zeitpunkt am Punkt x bewegt. Dann ist $(v \cdot n)(x)$ die Masse, die am Punkt $x \in \partial U$ aus U „heraus fließt".
Also ist

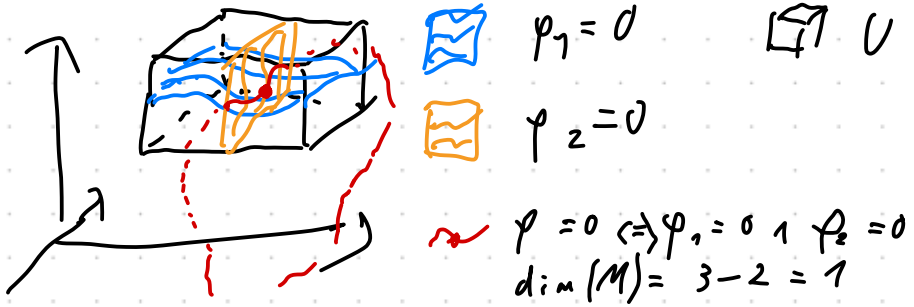
$$\int_{\partial U} v \cdot n\,dS$$

Gesamtmasse, die über den Rand U herein / heraus fließt.

§ Integration über Untermannigfaltigkeiten

Was sind (gekrümmte) Flächen?

(Bzw. k-dimensionale „Flächen" in $\mathbb{R}^n$ mit $n > k$)



Def 8.1 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt M eine **k-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit**, wenn zu jedem $a \in M$

eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und

eine α-mal stetig diff.bare Funktion

$\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit

$M \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$

und

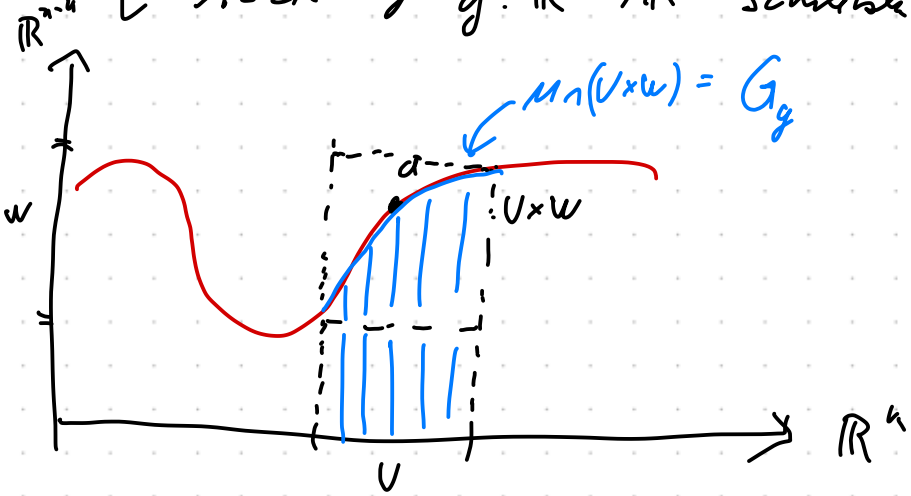
$\operatorname{Rang} D\varphi(a) = n - k$ gibt.

Eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1 heißt kurz **Untermannigfaltigkeit**.

Satz 8.2 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dim C^α-Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann ex. (ggf. nach Umnummerierung der Koordinaten) Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' = (a_1, \dots, a_k)$ und $W \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' = (a_{k+1}, \dots, a_n)$ und ein α-mal stetig diff.bares $g: U \to W$ mit

$$M \cap (U \times W) = G_g := \{(x,y) \in U \times W \mid y = g(x)\}.$$

[D.h. M lässt sich lokal als Graph einer Abbildung $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ schreiben]



Beweis Sei $a \in M$. Dann ex. Umgebung $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und φ aus Def 8.1. Wegen $\operatorname{Rang} D\varphi(a) = n-k$ ex. $n-k$ linear unabhängige Spalten von $D\varphi(a)$, o.B.d.A. $D_{k+1}\varphi(a), \dots, D_n\varphi(a)$. Da $D\varphi$ stetig sind auch $D_{k+1}\varphi, \dots, D_n\varphi$ in einer Umgebung $U'' \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ linear unabhängig, d.h. für $z = (x,y)$ ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \text{ invertierbar } \forall (x,y) \in U''.$$

Nach Satz über impl. Funktionen ex. Umgebungen U von a' und W von a'' mit $U \times W \subseteq U''$ und $g: U \to W$ mit

$$M \cap (U \times W) = \{(x,y) \in U \times W \mid y = g(x)\}.$$

Ferner gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}^{-1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Somit ist $\frac{\partial g}{\partial x}$ $(\alpha-1)$-mal stetig diff.bar. ∎