

107

Satz 8.3 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und

$$E_k = \mathbb{R}^k + \underbrace{\{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})\}}_{n-k} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

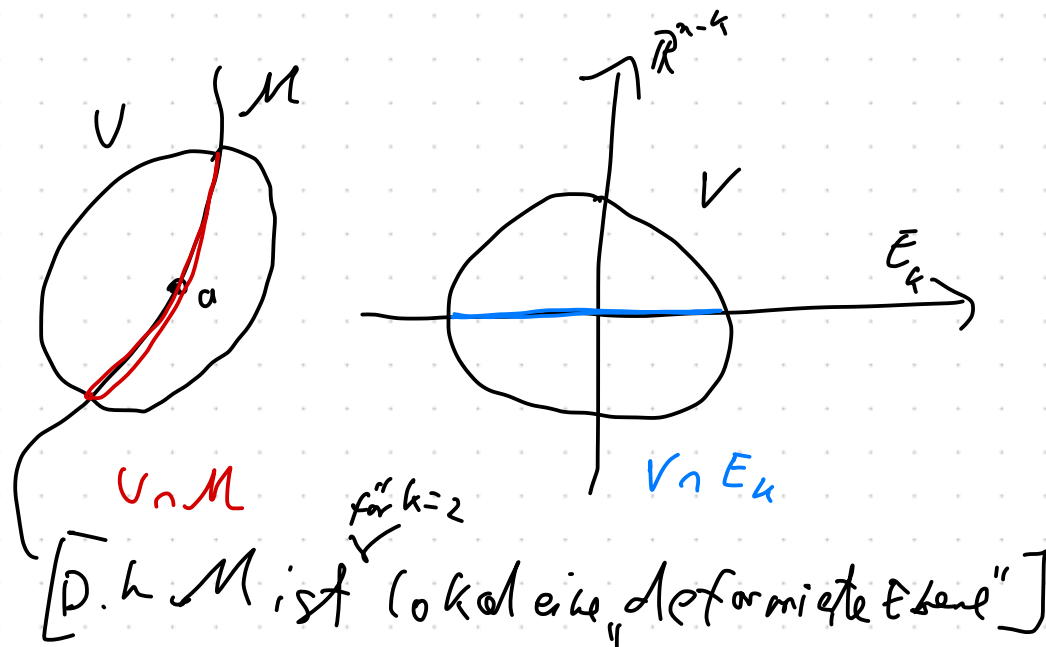
Dann ist M eine k -dim. C^k -Untermann. genau dann, wenn es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a , eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen C^k -Diffeomorphismus

$$F: U \rightarrow V$$

mit

$$F(U \cap M) = E_k \cap V \quad \text{gilt.}$$

Beweis (Forster)



(108) Erinnerung (etwas Topologie)

Def 8.4 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\mathcal{I}(M) = \{M \cap U \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}\}$$

die Relativtopologie von M und

$O \in \mathcal{I}(M)$ offen relativ zu M

bzw (relativ) offen in M .

Bem $(M, \mathcal{I}(M))$ ist ein top. Raum.

Bem Sei $K \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

K kompakt bzgl. $\mathcal{I}(M) \Leftrightarrow K$ kompakt in $\mathbb{R}^n$

Def 8.5 Seien $(M_1, \mathcal{I}_1)$ und $(M_2, \mathcal{I}_2)$ top. Räume.

Dann heißt $\Phi: M_1 \rightarrow M_2$ ein Homöomorphismus,

wenn Φ bijektiv und Φ und Φ^{-1} stetig.

Def 8.6 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig
diff. bar Abbildung $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$
heißt Immersion, wenn $\text{Rang } Dp(x) = k \quad \forall x \in \Omega$.

Satz 8.7 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$
eine Immersion und C^α (mit $\alpha \geq 1$). Dann ex.
zu jedem $x \in \Omega$ eine offene Umgebung,
so dass $M := p(U)$ eine k -dim. C^α -Unter-
mannigfaltigkeit und $p: U \rightarrow M$
ein Homöomorphismus ist.

Beweis (Forster)

(109)

(lokale Parameterdarstellung)

Satz 8.8 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

- (A) M genau dann eine k.d.m.
 C^k -Untermannigfaltigkeit, wenn
- (B) zu jedem $a \in M$ eine relativ offene
 Umgebung $a \in U \subseteq M$, eine offene Menge $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^k$
 und eine C^k -Immersion $p: \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt,
 so dass $p: \hat{U} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis (B) $\Rightarrow$ (A) ist gerade Satz 8.7

(A) $\Rightarrow$ (B): Sei $a \in M$. Nach Satz 8.2
 ex. $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^k$, $W \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ offen mit
 $a \in U = \hat{U} \times W$ und $g: \hat{U} \rightarrow W$ C^k
 mit

$$M \cap (\hat{U} \times W) = G_g.$$

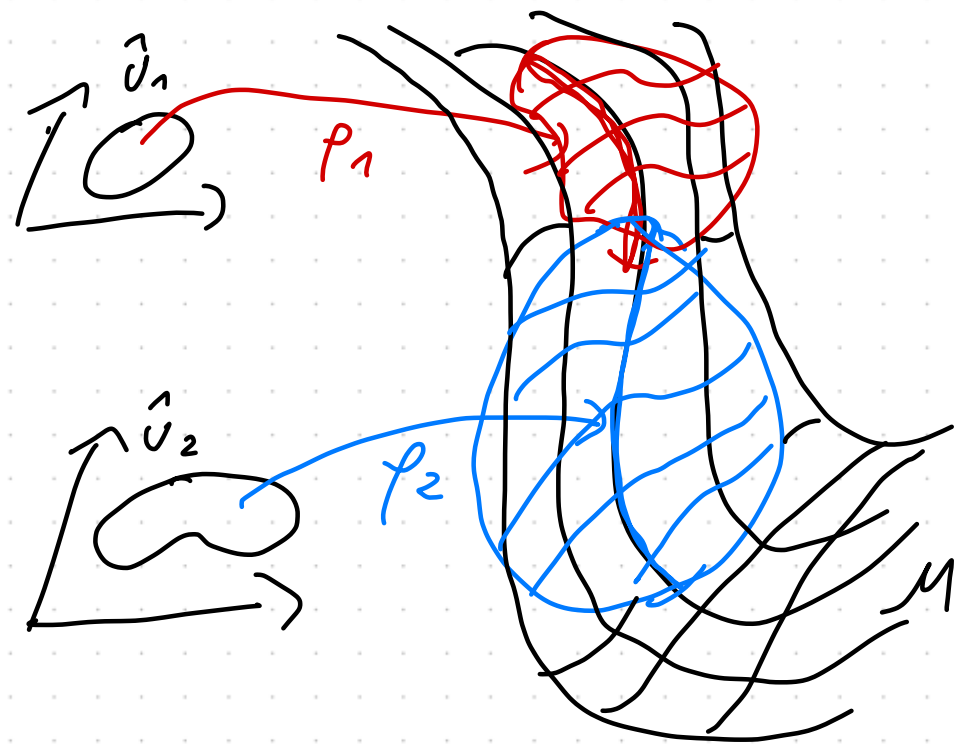
Setze nun $p: \hat{U} \rightarrow U$, $p(x) = (x, g(x))$.
 dann ist p C^k , bijektiv und
 es gilt $\text{Rang } Dp(x) = k \quad \forall x \in \hat{U}$.

Eine Abbildung p wie in Satz 8.8 heißt
 eine C^k -Karte von M .

Eine Familie $(\{\hat{U}_i, p_i\})_{i \in I}$ von Karten

$p_i: \hat{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ von M mit

$M = \bigcup_{i \in I} p_i(\hat{U}_i)$ heißt Atlas von M .



110

Für eine k -dim. Untermannigfaltigkeit M
und eine Karte $\varphi: \hat{U} \rightarrow U$ ($U \subseteq M$, $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ offen)
heißt die Abbildung

$$G: \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$$

mit

$$G_{ij}(\hat{x}) := \langle D_i \varphi(\hat{x}), D_j \varphi(\hat{x}) \rangle \quad i, j = 1, \dots, k$$

$$= \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial \hat{x}_i}(\hat{x}) \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x})$$

$$\text{bzw. } G(\hat{x}) = (D\varphi(\hat{x}))^T D\varphi(\hat{x})$$

metrischer Tensor oder Maßtensor

$$\text{von } M \text{ bzgl. } \varphi. \quad g := \det G: \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt Gramsche Determinante von M bzgl. φ .