

(111)

Parameter transformation

Satz 8.9 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dim
 C^k -Untermannigfaltigkeit und

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow U_1 \subseteq M,$$

$$\varphi_2: U_2 \rightarrow U_2 \subseteq M$$

zwei C^k -Karten mit $U := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Dann ist $\Psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: W_1 \rightarrow W_2$ ein
 C^k -Diffeomorphismus zwischen $W_1 = \varphi_1^{-1}(U)$

und $W_2 = \varphi_2^{-1}(U)$.

Beweis: (Forst)

Seien $\varphi: U \rightarrow V$ und

$$\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow V$$

zwei Karten und $\Phi = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$, bzw.

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \Phi. \text{ Dann gilt}$$

$$D\tilde{\varphi}(\xi) = D\varphi(\Phi(\xi)) D\Phi(\xi)$$

und somit für den metr. Tensor $\tilde{G}$
 bzgl. $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{G}(\xi) = (D\Phi(\xi))^T D\varphi(\Phi(\xi)) D\varphi(\Phi(\xi)) D\Phi(\xi)$$

und somit

$$\tilde{G} = D\Phi^T (G \circ \Phi) D\Phi$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \det(\tilde{G}) = |\det(D\Phi)|^2 \det(G \circ \Phi) \\ &= |\det(D\Phi)|^2 g \circ \Phi \end{aligned}$$

(172)

Bem 1 Sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, dann

$$\int_U f(\varphi(x)) \sqrt{g(x)} dx$$

$$= \int_{\tilde{U}} f(\varphi(\Phi(\xi))) \sqrt{g(\Phi(\xi))} \cdot |\det D\Phi(\xi)| d\xi$$

$$= \int_{\tilde{U}} f(\tilde{\varphi}(\xi)) \sqrt{\tilde{g}(\xi)} d\xi$$

Bem 2 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein k -dim affiner Unterraum, $\Phi: \tilde{U} \rightarrow U \subseteq M$ eine Karte und $A \subseteq U \subseteq M$ mit $\hat{A} = \Phi^{-1}(A) \subseteq \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ messbar.

Dann gilt für das k -dim Volumen von A (nach geeigneter Drehung in $\mathbb{R}^k \times \{0, \dots, 0\}$)

$$\text{Vol}_k(A) = \sqrt{g} \text{Vol}_k(\hat{A}) = \sqrt{g} \text{Vol}_k(\Phi^{-1}(A)).$$

(Übung)

Def 8.10 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dim UM und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi: \tilde{U} \rightarrow U \subseteq M$ eine Karte ($\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ offen) mit $g = \det D\Phi^T D\Phi$ und $f|_{M \setminus U} = 0$. Dann heißt f int.bar über M , wenn $\tilde{x} \mapsto f(\Phi(\tilde{x})) \sqrt{g(\tilde{x})}$ int.bar über $\tilde{U}$ ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_M f(x) dS(x) := \int_{\tilde{U}} f(\Phi(\tilde{x})) \sqrt{g(\tilde{x})} d^k \tilde{x}.$$

$$\left[\text{Formal: } dS(x) = \sqrt{g(\tilde{x})} d^k \tilde{x} \text{ mit } x = \Phi(\tilde{x}) \right]$$

Bem Wegen Bem 1 ist die Def. unabhängig von der Wahl der Karte!

(113)

Notation: Eine Zerlegung der Eins auf einer Menge M

ist eine Familie $(\alpha_i)_{i \in I}$ von Funktionen

$$\alpha_i: M \rightarrow [0, 1] \text{ mit}$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i(x) = 1 \quad \forall x \in M.$$

Die Zerlegung heißt

- stetig, wenn jedes α_i stetig ist
- lokal endlich, wenn für jedes $x \in M$ höchstens endlich viele $\alpha_i(x) \neq 0$ sind.

Def 8.11 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dim UM und $(\hat{U}_i, \Phi_i)_{i=1, \dots, m}$ ein Atlas von M mit

$$\Phi_i: \hat{U}_i \rightarrow U_i \quad \text{für } \hat{U}_i \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen, } U_i \subseteq M \text{ offen.}$$

Sei ferner $(\alpha_i)_{i=1, \dots, m}$ eine Zerlegung der Eins auf M mit $\alpha_i|_{M \setminus U_i} = 0$ und $\alpha_i \circ \Phi_i$ lokal int. bar auf $\hat{U}_i$ $\forall i$. Eine Funktion

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt int. bar über M , wenn $f|_{U_i}$ int. bar $\forall i$ ist. In diesem Fall setze

$$\int_M f(x) dS(x) := \sum_{i=1}^m \int_M \alpha_i(x) f(x) dS(x). \quad (*)$$

Bsp: Setze $W_i = U_i \setminus \bigcup_{j=1}^m U_j$ und

$\alpha_i = \chi_{W_i}: U_i \rightarrow [0, 1]$. Dann wird (*) zu

$$\int_M f(x) dS(x) = \sum_{i=1}^m \int_M f|_{W_i}(x) dS(x)$$

für die disjunkte Zerlegung $M = \bigcup_{i=1}^m W_i$

(119)

Bem Def. 8.11 ist wohl def.,
d.h. unabhängig von der
Wahl des Atlas und der
Zerlegung. (Faster)

Def 8.12 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eukl.-dim VM.

Dann heißt $A \subseteq M$ int. bar,
wenn χ_A int. bar über M und
wir setzen

$$\text{Vol}_k(A) = \int_M \chi_A(x) dS(x).$$

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt A -int. bar über M ,
falls $f\chi_A$ int. bar über M und
wir setzen dann

$$\int_A f(x) dS(x) := \int_M f(x) \chi_A(x) dS(x).$$

Bem a) $\int_M dS(x)$ und $\int_A dS(x)$ sind linear

b) Ist M ein affiner Unterraum, so
stimmen (nach geeigneter Belegung)
 $dS(x)$ und Vol_k mit $d\ell_1$ und ℓ_1^k
überein.

Bem Den Fall nicht-endlicher Über-
deckungen betrachten wir nicht!