

115

Bsp Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar.

Wir berechnen die Fläche des Graphen von f :

Sei $M = \mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dann ist M eine n -dim VM in $\mathbb{R}^{n+1}$

und $\Phi: \Omega \rightarrow M$, $\Phi(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ ist eine Karte. Somit gilt:

$$\text{Vol}_n(\mathcal{G}_f) = \text{Vol}_n(M) = \int_M 1 \, dS(x)$$

$$= \int_{\Omega} \underbrace{(1 \circ \Phi)(x)}_{=1} \sqrt{g(x)} \, dx$$

$$= \int_{\Omega} \sqrt{g(x)} \, dx$$

$$= \int_{\Omega} \sqrt{\det(D\Phi(x)^T D\Phi(x))} \, dx$$

$$D\Phi(x) = \begin{pmatrix} I \\ \nabla f(x)^T \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \in \mathbb{R}^{1 \times n} \end{array} \right.$$

$$D\Phi(x)^T D\Phi(x) = I + \nabla f(x)^T \nabla f(x) = B(x)$$

$$g(x) = \det(B(x)) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(B(x)) = 1 + \|\nabla f(x)\|^2$$

$$\Rightarrow \text{Vol}_n(\mathcal{G}_f) = \text{Vol}_n(M) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} \, dx$$

9. Gaußscher Integralsatz (Part. Integration II)

Def 9.1 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine UM und $a \in M$. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^n$ ein Tangentenvektor an M im Punkt a , wenn es eine stetig diff.-bare Kurve

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \quad \text{mit } \varepsilon > 0, \gamma(0) = a, \gamma'(0) = v$$

gibt. Die Menge

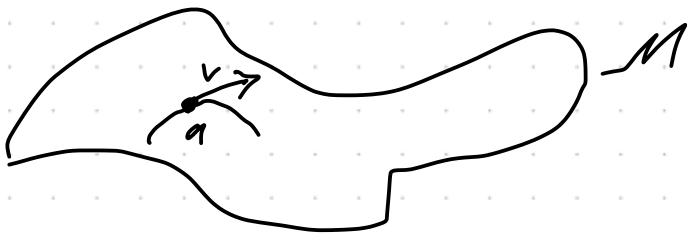
$$T_a M := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ ist Tangentenvektor von } M \text{ in } a\}$$

heißt Tangentenraum von M in a .

Die Menge

$$TM = \{(a, T_a M) \mid a \in M\}$$

heißt Tangentenbündel von M .



Satz 9.2 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dim. UM und $a \in M$.

Dann gilt

- $T_a M$ ist ein k -dim. Unterraum von $\mathbb{R}^n$
- Ist $p: U \rightarrow V$ eine Karte von M mit $a \in U$ und $\tilde{a} = p^{-1}(a)$.

Dann gilt $T_a M = \text{Bild}(Dp(\tilde{a})) = \text{span}\{D_1 p(\tilde{a}), \dots, D_k p(\tilde{a})\}$,
d.h. $(D_1 p(\tilde{a}), \dots, D_k p(\tilde{a}))$ bilden eine Basis von $T_a M$

- Ist V eine offene Umgebung von a und $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ stetig diff.-bar mit

$$M \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\} \quad \text{und} \quad \text{Rang}(D\psi(a)) = n-k,$$

dann gilt $T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, \nu_i(a) \rangle = 0, i=1, \dots, n-k\}$

Beweis (Forster)

Bem Die Koeffizientendarstellung von $T_a M$

bezüglich der Basis aus b) liefert

einen Isomorphismus $\mathbb{I}_a: \mathbb{R}^k \rightarrow T_a M$

durch $\mathbb{I}_a(\hat{v}) = Dp(a) \hat{v}$. Das von Gl(1) erzeugte Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^k$ heißt auch 1. Fundamentalform und stellt das euklid. auf $T_a M$ dar.

$\mathbb{I}_a$ d.h. $\langle \mathbb{I}_a(\hat{v}), \mathbb{I}_a(\hat{w}) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle_{\mathbb{R}^k}$ für $\hat{v} = \frac{Dp(\tilde{v})}{\|Dp(\tilde{v})\|}, \hat{w} = \frac{Dp(\tilde{w})}{\|Dp(\tilde{w})\|} \in T_a M$

Def 9.3 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dim VM und $a \in M$. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^n$ ein Normalenvektor von M in a , wenn

$$v \perp T_a M, \text{ d.h. } \langle v, \tau \rangle = 0 \quad \forall \tau \in T_a M.$$

Wir setzen

$$N_a M := T_a M^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ Normalenvektor von } M \text{ in } a\}.$$

Bem $N_a M$ ist ein $(n-k)$ -dim Unterraum.

Für ψ aus Satz 9.2c) gilt

$$N_a M = \text{Bild}(D\psi(a)) = \text{span}\{D\psi_1(a), \dots, D\psi_{n-k}(a)\}.$$

Def. 9.4 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt.

Wir sagen, „ A hat glatten Rand“, wenn zu jedem $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig diff. bare Funktion

$\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

a) $A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$

b) $d\psi(x) \neq 0 \quad \forall x \in U.$

Satz 9.5 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glatten

Rand, $a \in \partial A$ und ψ wie in Def. 9.4.

Dann gilt

$$\partial A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\}.$$

Beweis (Förster)

Korollar 9.6 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$

kompakt mit glatten

Rand, dann ist ∂A

eine $(n-1)$ -dim VM.

