

(118)

Satz 9.7 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und $a \in \partial A$. Dann ex. genau ein Normalenvektor $\nu(a) \in N_a \partial A$ mit $\|\nu(a)\| = 1$ und

$$\exists \varepsilon > 0 \forall t \in (0, \varepsilon): a + t\nu(a) \notin A \quad (*)$$

Beweis Sei $U \subseteq A$ eine Umgebung von a und γ wie in Def 9.4. Setze dann
$$\nu(a) = \frac{D\gamma(a)}{\|D\gamma(a)\|}.$$

Dann gilt $\nu(a) \in \text{Bild}(D\gamma(a)) = N_a \partial A$, $\|\nu(a)\| = 1$ und $(*)$.

Eindeutigkeit: Da $N_a \partial A$ 1-dim ist, ist die einzige andere Möglichkeit $-\nu(a)$.

Dann gilt aber für t klein genug

$$\gamma(a + t(-\nu(a))) \leq 0, \text{ also } a + t(-\nu(a)) \in A$$

und somit nicht $(*)$.

□

Der eindeutige Vektor $\nu(a)$ aus

Satz 9.7 heißt äußere

Einheitsnormalenvektor. Da γ stetig diff'bar und $\|D\gamma(a)\| > 0$, hängt $\nu(a)$

stetig von a ab. Im folgenden sei

$\nu: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stets dieses äußere

Einheitsnormalenfeld.

Bem Ist ∂A eine C^2 -VM, so

kann man ν ableiten. Dies führt auf die 2. Fundamentalform bzw. die Weingartenabbildung.

Diese „kodiert“ die Krümmung“ von M in a .

(119) Wir können jetzt den Gaußschen
Integralsatz bzw. Divergenzsatz
 formulieren.

Satz 9.8 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit
 glattem Rand, $\nu: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere
 Einheitsnormalenfeld. Dann gilt für
 jedes stetig diff. bare Vektorfeld

$F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $A \subseteq U$:

$$\int_A \operatorname{div} F(x) d^n x = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Seien im Folgenden A und U wie in
 Satz 9.8 und

Korollar 9.9 Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
 diff. bar, dann gilt

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) d^n x = \int_{\partial A} f(x) \nu_i(x) dS(x).$$

Beweis: Wende Satz 9.8 auf das Vektorfeld
 $F = (0, \dots, 0, \underset{i}{f}, 0, \dots, 0)$ an. $\square$

(Part. Integration:)

Korollar 9.10 Seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
 diff. bar, dann gilt

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} g(x) d^n x = - \int_A f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) d^n x + \int_{\partial A} f(x) g(x) \nu_i(x) dS(x).$$

Beweis Wende Korollar 9.9 auf fg an $\square$

720

Lemma 9.11 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen,
 $I = (\alpha, \beta)$ ein offenes Intervall und
 $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff. bar.

Setze nun

$$A = \{(\hat{x}, z) \in \hat{U} \times I \mid z \leq h(\hat{x})\},$$

$$\mathcal{M} = \{(\hat{x}, z) \in \hat{U} \times I \mid z = h(\hat{x})\}.$$

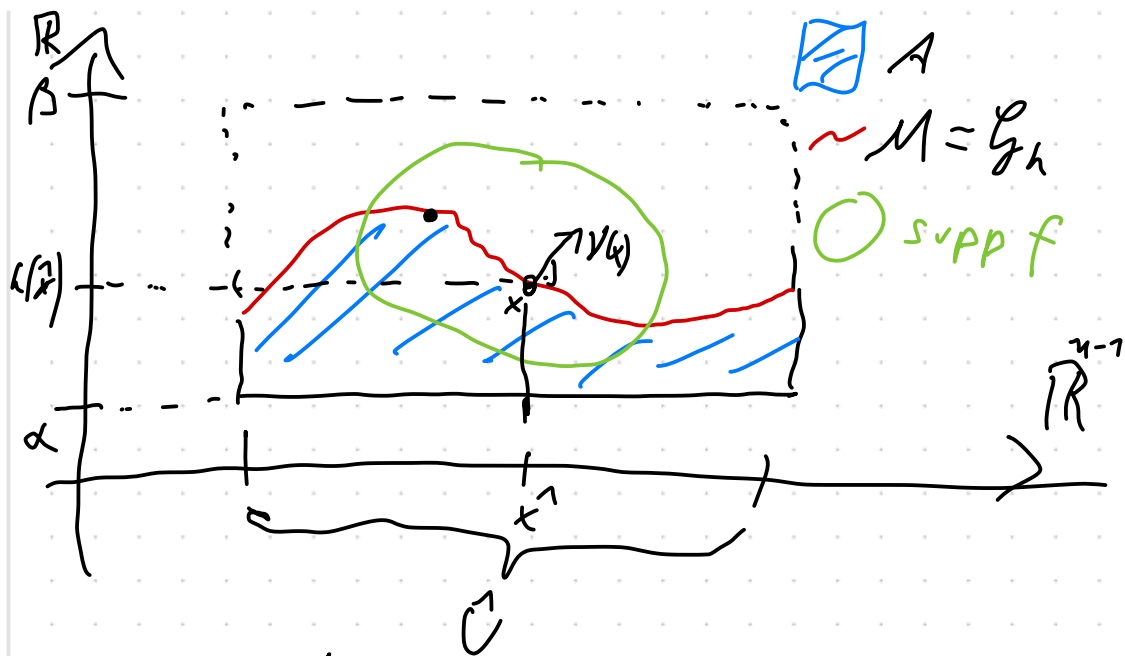
Dann gilt für jedes $f \in C_c^1(\hat{U} \times I)$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) d^n x = \int_M f(x) \nu_i(x) dS(x)$$

für $i = 1, \dots, n$ mit

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \| \sigma_h(x) \|^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\sigma_h(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x''_r \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ 1(x^2) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$



Beweis: M ist eine $(n-1)$ -dim UM von $\mathbb{R}^n$ mit Karte $\varphi: U \rightarrow M, \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ g(\vec{x}) \end{pmatrix}$
 $T_x M = \text{Bild} \left(\begin{pmatrix} I \\ \nabla h(\vec{x}) \end{pmatrix} \right)$ und außerdem Einheits-
normalenfeld $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Es gilt (siehe Bsp.)

$$ds(x) = \sqrt{1 + \| \nabla h(x^1) \|^2} dx^{n-1}$$

z.z. (mit $x = (x_1, x_2)$)

$$\int_{\tilde{U}} \int_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^1, x_n) dx_n d\tilde{x}^{n-1} = \int_{\tilde{U}} f(p(x)) \sqrt{1 + \|\partial h(x)\|^2} \nu_i(p(x)) d^{n-1} \tilde{x} \\ = \int_{\tilde{U}} f(p(x)) \left(\frac{-\partial h(x)}{1} \right)_i d^{n-1} \tilde{x}.$$

121

1. Fall $i = n$. Für jedes feste $\vec{x} \in \hat{U}$ gilt nach Hauptsatz

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) d^n x &= \int_{\hat{U}} \int_{\alpha}^{\frac{h(\vec{x})}{\partial x_n}} \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}, z) dz d^{n-1} \vec{x} \\ &= \int_{\hat{U}} \underbrace{f(\vec{x}, h(\vec{x}))}_{f(p(\vec{x}))} - \underbrace{f(\vec{x}, \alpha)}_{=0} d^{n-1} \vec{x} \\ &= \int_{\hat{U}} f(p(\vec{x})) \begin{pmatrix} -\partial h(\vec{x}) \\ 1 \end{pmatrix}_n d^{n-1} \vec{x}. \end{aligned}$$

2. Fall $i = 1, \dots, n-1$ ($x = (\vec{x}, x_n)$)
Setze $F(\vec{x}) := \int_{\alpha}^{x_n} f(\vec{x}, z) dz$,

dann gilt

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}) = \begin{cases} \int_{\alpha}^{x_n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}, z) dz & j = 1, \dots, n-1 \\ f(\vec{x}) & j = n \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (F \circ p)(\vec{x}) = (\partial F)(p(\vec{x})) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\vec{x})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p(\vec{x})) \cdot \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial x_i}(\vec{x})}_{=\delta_{ij}} + f(p(\vec{x})) \frac{\partial p_n}{\partial x_i}(\vec{x}) \\ &= \int_{\alpha}^{\frac{h(\vec{x})}{\partial x_i}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}, z) dz + f(p(\vec{x})) \frac{\partial h}{\partial x_i}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Also

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) d^n x = \int_{\hat{U}} \int_{\alpha}^{\frac{h(\vec{x})}{\partial x_i}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}, z) dz d^{n-1} \vec{x}$$

$$= \underbrace{\int_{\hat{U}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (F \circ p)(\vec{x}) d^{n-1} \vec{x} - \int_{\hat{U}} f(p(\vec{x})) \frac{\partial h}{\partial x_i}(\vec{x}) d^{n-1} \vec{x} \right)}_{=0, \text{ da } \vec{x} \mapsto (F \circ p)(\vec{x}) \text{ komp. Träger hat}}$$

$$= \int_{\hat{U}} f(p(\vec{x})) \begin{pmatrix} -\partial h(\vec{x}) \\ 1 \end{pmatrix}_i d^{n-1} \vec{x} \quad \square$$