122

Beweisskizze zu Satz 9.8:

1. Es ex. eine offene Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ von A, sodaß für jedes U_i entweder
   a) $U_i \subseteq \operatorname{int}(A) = A \setminus \partial A$ oder
   b) $U_i \cap \partial A \neq \emptyset$ lässt sich (ggf. nach Umnummerierung) als Graph schreiben.

2. Wähle eine glatte Zerlegung der Eins $1 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j$, so dass für jedes j gilt:
   $\operatorname{supp} \alpha_j$ ist ein Würfel und es ex. ein $i \in I$ mit $\operatorname{supp} \alpha_j \subseteq U_i$

3. Nun gilt

$$(I) = \int_A \operatorname{div} F(x) d^n x = \sum_{j=1}^{m} \int_A \operatorname{div}(\alpha_j(x) F(x)) d^n x$$

und

$$(II) = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial A} \langle \alpha_j(x) F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

1. Fall $\alpha_j \subseteq U_i$ mit a), dann gilt

$$\int_A \operatorname{div}(\alpha_j(x) F(x)) d^n x = 0 = \int_{\partial A} \langle \alpha_j(x) F(x), \nu(x) \rangle dS(x),$$

da $\operatorname{supp}(\alpha_j \cdot F) \subseteq U_i \subseteq \operatorname{int} A$ kompakt.

2. Fall $\alpha_j \subseteq U_i$ mit b), dann gilt nach Lemma 9.11

$$\int_A \operatorname{div}(\alpha_j(x) F(x)) d^n x = \int_{\partial A} \langle \alpha_j(x) F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Also $(I) = (II)$. ☒

(Green'sche Formel:)

Korollar 9.12 Seien $f, g: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar. Dann gilt

$$\int_A \Delta u(x) v(x)\, dx = -\int_A \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle + \int_{\partial A} v(x) \langle \nabla u(x), \nu(x) \rangle\, dS(x)$$

bzw.

$$\int_A \Delta u\, v\, dx = -\int_A \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial A} v \langle \nabla u, \nu \rangle\, dS(x).$$

Beweis (Übung, betrachte $F = \nabla u\, v$)