

1. Übung zur Vorlesung

ANALYSIS III

WS 2021/2022

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2021/AnalysisIII.php

Abgabe: Di., 02. November 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (6 TP)

Sei Ω eine nichtleere Menge, \mathbb{F}_2 der prime Restklassenkörper zur 2 mit Addition \oplus und Multiplikation \cdot und \mathbb{F}_2^Ω die Menge aller Abbildungen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{F}_2$. Für $A \subset \Omega$ sei $\chi_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ die charakteristische Funktion

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass \mathbb{F}_2^Ω mit \oplus und \cdot einen kommutativen Ring mit Einselement bildet.
- Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{F}_2^\Omega$ bijektiv ist.
- Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(\Omega)$ mit den Verknüpfungen Δ und \cap ein zu \mathbb{F}_2^Ω isomorpher Ring ist.

2. Aufgabe (6 TP)

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\Sigma' \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine abzählbare disjunkte Zerlegung von Ω , d.h., $\Sigma' = \{M_1, M_2, \dots\}$ mit $M_k \subset \Omega$, $M_n \cap M_k = \emptyset$ für $n \neq k$ und

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k.$$

Ferner sei $\mu' : \Sigma' \cup \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung mit $\mu'(\emptyset) = 0$.

- Geben Sie die kleinstmögliche σ -Algebra Σ mit $\Sigma' \subset \Sigma$.
- Geben Sie ein Maß $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ mit $\mu|_{\Sigma'} = \mu'$ an.
- Zeigen Sie, dass es genau ein solches Maß μ gibt.