Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser,

2. Übung zur Vorlesung

Analysis III

WS 2021/2022

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2021/AnalysisIII.php

Abgabe: Di., 09. November 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Sei (Ω, Σ) ein Messraum, Ω' eine nichtleere Menge und $\varphi : \Omega' \to \Omega$. Zeigen Sie, dass dann

$$\Sigma' = \varphi^{-1}(\Sigma) = \{\varphi^{-1}(A) \mid A \in \Sigma\}$$

eine σ-Algebra auf Ω ist.

2. Aufgabe (8 TP)
Sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k < b_k \forall k\}$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$ und

$$Q = \bigcup_{i=1}^{m} Q^i$$

eine Zerlegung von Q in paarweise disjunkte Quader $Q^i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k^i \leq x_k < b_k^i \forall k\}$. Für jedes k sei ferner

$$\{a_k^i, b_k^i \mid i = 1, \ldots, m\} = \{c_k^1, \ldots, c_k^{m_k}\}$$

mit $c_k^1 < \cdots < c_k^{m_k}$ eine aufsteigende Anordnung der a_k^i, b_k^i.

a) Zeigen Sie, dass sich sowohl Q als auch jedes Q^i eindeutig in endlich viele disjunkte Quader aus der Menge

$$S = \left\{\hat{Q}^{i_1,\ldots,i_n} \in \mathbb{R}^n \mid \hat{Q}^{i_1,\ldots,i_n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_k^{i_k} \leq x_k < c_k^{i_k+1} \forall k\} \text{ mit } i_k \in \{1, \ldots, m_k - 1\}\right\}$$

zerlegen lassen, d.h. dass eindeutige $M, M^i \subset S$ mit

$$Q = \bigcup_{\hat{Q} \in M} \hat{Q}, \qquad Q^i = \bigcup_{\hat{Q} \in M^i} \hat{Q}$$

existiert.

b) Zeigen Sie, dass für diese Zerlegungen

$$\lambda^n(Q) = \sum_{\hat{Q} \in M} \lambda^n(\hat{Q}), \qquad \lambda^n(Q^i) = \sum_{\hat{Q} \in M^i} \lambda^n(\hat{Q})$$

gilt.

3. Aufgabe (4 TP)
Sei $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf Ω und $\mu_k : \Sigma \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, $k \geq 1$, eine Folge von Inhalten und $c_k \in \mathbb{R}_0^+$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass auch durch

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_k(A) \qquad \text{für } A \in \Sigma$$

ein Inhalt auf Σ definiert ist.

b) Zeigen Sie, dass μ σ-additiv ist, wenn alle μ_k σ-additiv sind.