Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser,

3. Übung zur Vorlesung

Analysis III

WS 2021/2022

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2021/AnalysisIII.php

Abgabe: Di., 16. November 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Sei $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß. Eine Teilmenge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Carathéodory-messbar bezüglich μ^*, wenn

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A) \qquad \forall X \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Sei nun $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ ein Maß auf einer σ-Algebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und μ^* das zugeordnete äußere Maß. Zeigen Sie, dass jedes $A \in \Sigma$ Carathéodory-messbar bezüglich μ^* ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem mit $\emptyset \in \Sigma$ und $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ eine beliebige Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ setze

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \Sigma \forall i \right\}.$$

(Bemerkung: Falls A in keiner solchen Vereinigung liegt, ist das Infimum $= +\infty$.)
Zeigen Sie, dass $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß ist.

3. Aufgabe (8 TP)
Sei $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ ein endliches Prämaß auf einer Mengenalgebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$ das zugeordnete äußere Maß. Zeigen Sie, dass

$$\left\{ A \in \mathcal{P}(\Omega) \;\middle|\; \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{A} \in \Sigma : \mu^*(A \triangle \tilde{A}) < \varepsilon \right\}$$

eine σ-Algebra auf Ω ist.