

6. Übung zur Vorlesung

ANALYSIS III

WS 2021/2022

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS\\_2021/AnalysisIII.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2021/AnalysisIII.php)

**Abgabe: Di., 14. Dezember 2021, 12:00 Uhr**

**1. Aufgabe** (8 P)

Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum und  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$  messbar. Zeigen Sie

a)  $\int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu \quad \forall \alpha \geq 0,$

b)  $\int_{\Omega} f + g d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu,$

c)  $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu.$

**2. Aufgabe** (4 P)

(Lemma von Fatou) Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum  $(f_k)$  eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen  $f_k : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ . Zeigen Sie:

$$\int_{\Omega} (\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu.$$

**3. Aufgabe** (4 P)

Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Zeigen Sie, dass  $fg$  integrierbar ist.