Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser,

7. Übung zur Vorlesung

Analysis III

WS 2021/2022

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2021/AnalysisIII.php`

Abgabe: Di., 4. Januar 2022, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (6 P)

a) Diskutieren Sie den Bezug der Begriffe *konvergente Reihe* und *absolut konvergente Reihe* zur uneigentlichen Riemann- und dem Lebesgue-Integrierbarkeit.

b) Beweisen Sie das Majorantenkriterium für die absolute Konvergenz von Reihen mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue.

c) Zeigen Sie, dass uneigentlich Riemann-integrierbare nichtgnegative Funktionen Lebesgue-integrierbar sind und beide Integrale übereinstimmen.

2. Aufgabe (4 P)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist das Bildmaß von f gegeben durch

$$\mu \circ f^{-1} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad (\mu \circ f^{-1})(M) = \mu(f^{-1}(M)) \quad \forall M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Sei nun $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{Id}(x) = x$, die Identität. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar bezüglich μ ist, wenn Id integrierbar bezüglich des Bildmaßes $\mu \circ f^{-1}$ ist und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\mathbb{R} \mathrm{Id} \; d(\mu \circ f^{-1}) = \int_\mathbb{R} y \, d(\mu \circ f^{-1})(y).$$

Sie brauchen nicht zu zeigen, dass das Bildmaß ein Maß ist.
(Hinweis: Betrachten Sie zunächst f^+ und Id^+.)

3. Aufgabe (6 P)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar mit

$$\mu(f^{-1}(I)) = \mu(g^{-1}(I)) \qquad \text{für alle Intervalle } I \subset \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn g integrierbar ist und dass in diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu.$$

b) Zeigen Sie, dass diese Aussage nicht gilt, wenn man ïntegrierbar" durch üneigentlich Riemann-integrierbarërsetzt.

c) Interpretieren Sie diese Aussagen im Kontext von Umordnungen von Reihen.