Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser,

8. Übung zur Vorlesung

Analysis III

WS 2021/2022

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2021/AnalysisIII.php

Abgabe: Di., 18. Januar 2022, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P)
Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ separabel ist, d.h., dass eine abzählbare, bezüglich $\|\cdot\|_{L^1}$ dichte Teilmenge existiert.

2. Aufgabe (4 P)
(Höldersche Ungleichung) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Für $p \in [1, \infty)$ sind die L^p-Norm und der zugehörige Raum definiert durch

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \qquad \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ messbar }, \|f\|_{L^p} < \infty \big\}.$$

Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$ mit $p, q \in (0, 1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

gilt und somit insbesondere $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$.
Hinweis: Sie können die *Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel* verwenden:

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b \qquad \forall a, b > 0, t \in (0, 1).$$

3. Aufgabe (4 P)
(Minkowskische Ungleichung) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeigen Sie für $p \in (1, \infty)$

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \qquad \forall f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu).$$

Hinweis: Sie können die Höldersche Ungleichung verwenden.

4. Aufgabe (4 P)
Sei Ω endlich oder abzählbar, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ mit $\mu(M) = |M|$ für $M \in \Sigma$.

a) Zeigen Sie für $\Omega = \{1, \ldots, n\}$, dass $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}^n$ mit der p-Norm ist, d.h., dass ein Isomorphismus $\Phi : \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\Phi(v)\|_p = \|v\|_{L^p}$ existiert und geben Sie Φ an.

b) Charakterisieren Sie $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ für $\Omega = \mathbb{N}$.