Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser,

9. Übung zur Vorlesung

Analysis III

WS 2021/2022

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2021/AnalysisIII.php

Abgabe: Di., 25. Januar 2022, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Borel-messbar und $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ messbar und nicht-negativ. Sei ferner

$$G_{<f} := \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

die Fläche unter dem Graphen von f. Zeigen Sie:

a) $G_{<f} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist messbar.

b) f genau dann integrierbar ist, wenn $\mathrm{Vol}_{n+1}(G_{<f})$ endlich ist und in diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f(x) d^n x = \mathrm{Vol}_{n+1}(G_{<f}).$$

2. Aufgabe (4 P)
Sei $B_d = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, \|x\| < 1\}$ die d-dimensionale Einheitskugel und $f_{d,k} : B_d \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ die Singularitätsfunktion

$$f_{d,k}(x) = \begin{cases} \|x\|^{-k} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Geben Sie für jedes $d > 1$ ein k an, so dass $f_{d,k}$ integrierbar über B_d aber $f_{d-1,k}$ nicht integrierbar über B_{d-1} ist.

3. Aufgabe (4 P)
Für $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy & \text{falls dieses Integral definiert und endlich ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$(x, y) \mapsto f(y) g(x-y)$$

integrierbar über $\mathbb{R}^{2n}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy$ fast überall (d.h. für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ bis auf eine Nullmenge N) definiert und endlich ist.

c) Zeigen Sie, dass $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt und beweisen Sie die Abschätzung

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

d) Zeigen Sie, dass $f * g = g * f$.

4. Aufgabe (4 P)
Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ die Borel-Sigmaalgebra. Für $z \in \mathbb{R}^m$ ist das zugehörige Diracmaß δ_z definiert durch

$$\delta_z : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}, \qquad \delta_z(M) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in M, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien nun $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^m$ paarweise verschieden.

a) Zeigen Sie, dass $\mu = \sum_{k=1}^n \delta_{z_k}$ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $L^p(\mathbb{R}^m, \mu)$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}^n$ mit der p-Norm ist.