Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser,

10. Übung zur Vorlesung

Analysis III

WS 2021/2022

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2021/AnalysisIII.php

Abgabe: Di., 01. Februar 2022, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P)
Satz: (Approximation durch Faltung) Sei $\delta_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Dirac-Folge, d.h.

a) $\delta_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

b) $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x)\, dx = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

c) für jedes Kugel $B_r(0)$ gilt $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \delta_k(x)\, dx = 0$.

Dann gilt:

a) Für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist $(f * \delta_k)$ L^1-konvergent gegen f.

b) Für jede gleichmäßig stetige, beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiert $(f * \delta_k)$ gleichmäßig gegen f.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\eta_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der *Glättungskern*

$$\eta_k(x) = \frac{k^n}{c}\hat{\eta}(k\|x\|) \qquad \text{mit} \qquad \hat{\eta}(r) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-r^2}\right) & \text{für } r \in (-1,1), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad c = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\eta}(\|x\|)\, dx.$$

a) Zeigen für, dass η_k eine *Dirac-Folge* ist.

b) Zeigen Sie, dass $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \eta_k = \overline{B_{1/k}(0)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass eine Folge von C^∞-Funktionen f_k existiert, die gegen f L^1-konvergiert und für deren Träger $\operatorname{supp} f_k \subset \operatorname{supp} f + \overline{B_{1/k}(0)}$ gilt.

2. Aufgabe (8 P)
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $L_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der *Landau-Kern*

$$L_k(x) = \frac{1}{c_k^n} \prod_{i=1}^n (1 - x_i^2)^k \chi_{[-1,1]^n}(x) \qquad \text{mit} \qquad c_k = \int_{-1}^1 (1-t^2)^k\, dt.$$

a) Zeigen für, dass L_k eine *Dirac-Folge* ist.

b) Sei $F \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} F \subset B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Einschränkung von $F * L_k$ auf $B_{1/2}(0)$ ein Polynom vom Grad höchstens k ist.

c) Beweisen Sie, den Approximationssatz von Weierstraß: Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C(K)$ existiert eine Folge von Polynomen P_k, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

3. Aufgabe (4 P)
Sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ mit $k < n$ eine injektive, affin lineare Abbildung und $A \subset \operatorname{Bild} \Phi \subset \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass sich A in die Ebene $\mathbb{R}^k \times \{(0, \ldots, 0)\}$ bewegen lässt, d.h. dass eine Bewegung $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ein $\hat{A} \in \mathbb{R}^k$ existiert, so dass $\Psi(A) = \hat{A} \times \{(0, \ldots, 0)\}$ gilt.

b) Sei nun dieses $\hat{A}$ Borel-messbar in $\mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lambda^k(\hat{A}) = \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)}\lambda^k(\Phi^{-1}(A)).$$