Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. C. Gräser

Nachklausur zur Vorlesung Analysis III WS 2021/2022

29.03.2022

- **Beschriften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, mit Ihrem Namen. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und ordnen Sie Ihre Blätter nach Aufgabennummer.**
- **Bitte heften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, nach der Klausur mit einem der bereitgestellten Hefter zusammen.**
- **Bitte benutzen Sie keinen Bleistift.**
- **Erlaubte Hilfsmittel sind alle schriftlichen oder elektronischen Unterlagen und Bücher. Die Kommunikation mit anderen zu die Klausur betreffenden Fragen ist nicht erlaubt.**

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: ____________________

Wenn Sie Ihre Klausurergebnisse auf der Web-Seite der Vorlesung unter Ihrer Matrikelnummer nachlesen wollen, unterschreiben Sie bitte die folgende Erklärung:

Ich bin damit einverstanden, dass mein Ergebnis bei dieser Klausur unter meiner Matrikelnummer auf der Web-Seite zur Vorlesung veröffentlicht wird.

______________________________________ (Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						

Viel Erfolg!

Bitte lösen Sie <u>**alle**</u> folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob Sie richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort mit einem Satz oder Gegenbeispiel.

Für jede Teilaufgabe, bei der Ihre Antwort und die Begründung richtig sind, bekommen Sie einen Punkt. Für alle unvollständig oder falsch gelösten Teilaufgaben erhalten Sie null Punkte.

a) Es existiert kein translationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\mu([0,1]) = 1$.

b) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin linear mit $\mathrm{Rang}(D\Phi(0)) = n$. Dann ist das Bildmaß $\Phi_* \lambda^n$ translationsinvariant.

c) Jede offene oder abgeschlossene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist Borel-messbar.

d) Jede Borel-messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist offen oder abgeschlossen.

e) Jede uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar.

f) Der Rand jeder kompakten Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit.

g) Sei $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktionenfolge mit $f_k \to f$ f.ü. für eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.

h) Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f(x)dx = 0$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)
Sei $V \subset \mathbb{R}$ eine Menge, die nicht Lebesgue-messbar ist.

a) Zeigen Sie, dass $V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ nicht Borel-messbar ist.

b) Zeigen Sie, dass $V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $g'(1) = 1$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = g(\|x\|^2)$. Berechnen Sie

$$\int_{B_1(0)} \Delta f(x)\, dx.$$

Hinweis: Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl von g.
Erinnerung: Es gilt $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ und $\Delta = \operatorname{div} \nabla$.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)
Für $H > 0$ sei die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = H(1 - \|x\|)$ gegeben. Dann ist

$$\mathcal{M} = \{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < \|x\| < 1\}$$

der Mantel eines $(n+1)$-dimensionalen Kegels mit Radius 1 und Höhe H.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, indem Sie eine Karte $\varphi : U \to \mathcal{M}$ für eine geeignete offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ angeben.

b) Berechnen Sie den n-dimensionalen Flächeninhalt $\operatorname{Vol}_n(\mathcal{M})$ der Mantelfläche des Kegels.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei $p \in (1, \infty)$ und $q = p/(p-1)$. Zeigen Sie, dass für jedes Paar von Funktionen $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ eine Nullmenge $N \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ gilt.

Ende der Klausur